Limite de șiruri. Limite de funcții.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n n^p+\cdots+a_2n^2+a_1n+a_0}{b_q n^q+\cdots+b_2n^2+b_1n+b_0}=\begin{cases}\infty\cdot\operatorname{sgn}\left(\frac{a_p}{b_q}\right), p>q\\ \frac{a_p}{b_q}, p=q\\ 0, p<q\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, a>0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p, p\in\mathbf{R}$$

Funcții continue

- Funcția $f: D\to\mathbf{R}$ este continuă în punctul $a\in D$ care este punct de acumulare pentru *D* dacă și numai dacă $l_s(a)=l_d(a)=f(a)$.
- Orice funcție continuă pe intervalul *I* are proprietatea lui Darboux ($\forall x_1, x_2\in I$ și $\forall\lambda\in\left(f(x_1), f(x_2)\right)$ există $c\in(x_1, x_2)$ astfel încât $f(c)=\lambda$).
- Dacă $f: I\to\mathbf{R}$ este monotonă și $f(I)=\mathrm{Im}f$ este tot interval atunci *f* este funcție continuă.
- Dacă $f: I\to\mathbf{R}$ este continuă și injectivă, atunci *f* este strict monotonă.
- Fie $f:[a;b]\to\mathbf{R}$ este o funcție continuă astfel încât $f(a)\cdot f(b)<0$ atunci există $c\in(a;b)$ astfel încât $f(c)=0$.
- Dacă $f:[a;b]\to\mathbf{R}$ este continuă, atunci funcția *f* este mărginită și își atinge marginile (teorema lui Weierstrass).

Funcţii derivabile

Definiţie: Fie *f*:D$\to R$, $x_0\in D$ punct de acumulare pentru D.

Derivata într-un punct: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

f este derivabilă în x_0 dacă limita precedentă există şi este finită.

Dacă *f* este derivabilă în x_0, graficul funcţiei are în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ tangentă a cărei pantă este $f'(x_0)$

Ecuaţia tangentei este: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Teoremă: Fie *f*:D$\to$R, $x_0\in D$ punct de acumulare pentru D$\Rightarrow f$ este derivabilă în punctul de acumulare x_0 $\Leftrightarrow f'_s(x_0)=f'_d(x_0)\in\mathbf{R}$(finite)$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in R$.

Teoremă. Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Regula lui l'Hospital.
Fie funcțiile $f, g: I \to \mathbf{R}$ și x_0 punct de acumulare pentru *I*.

Dacă:
a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (respectiv $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$)

b) f, g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}, g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

c) există limita $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbf{R}}$ atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Proprietăţile funcţiilor derivabile

Definiţie: Fie *f*: D→R. Un punct $x_0 \in D$ se numeşte punct de maxim local (respectiv de minim local) al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$ (respectiv $f(x) \geq f(x_0)$)pentru orice x $\in D \cap U$.
Dacă $f(x) \leq f(x_0)$ (respectiv $f(x) \geq f(x_0)$) pentru orice $x \in D$ atunci x_0 se numeşte punct de maxim absolut(respectiv minim absolut)
Teoremă. (Fermat) Fie I un interval deschis şi $x_0 \in$ I un punct de extrem al unei funcţii *f*: I→R. Dacă *f* este derivabilă în punctul x_0 atunci $f'(x_0)=0$.
Definiţie: O funcţie *f*: [a, b] →R (a< b) se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul compact [a, b] şi derivabilă pe intervalul deschis (a, b*)*.
Teorema lui Rolle. Fie *f*: [a, b]→ R, a< b o funcţie Rolle astfel încât *f*(a)=*f*(b), atunci există cel puţin un punct c $\in$ (a, b) astfel încât *f*'(c)=0.
Teorema (teorema lui J. Lagrange). Fie *f* o funcţie Rolle pe un interval compact [a, b]. Atunci $\exists$ c $\in$ (a, b) astfel încât *f*(b)−*f*(a)= (b−a)*f*'(c)
Consecinţe:
1. Dacă o funcţie derivabilă are derivata nulă pe un interval atunci ea este constantă pe acel interval.
2. Dacă două funcţii derivabile au derivatele egale pe un interval atunci ele diferă printr-o constantă pe acel interval.

Rolul primei derivate
Fie *f* o funcţie derivabilă pe un interval I.
Dacă $f'(x) > 0 (f'(x) \geq 0), \forall x \in I$, atunci *f* este strict crescătoare(crescătoare) pe I.
Dacă $f'(x) < 0 (f'(x) \leq 0), \forall x \in I$, atunci *f* este strict descrescătoare(descrescătoare) pe I.
Observaţie: Cu ajutorul primei derivate se stabilesc intervalele de monotonie ale unei funcţii derivabile şi se determină punctele de extrem local.
Rolul derivatei a doua
Teoremă: Fie *f* o funcţie de două ori derivabilă pe I.
Dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este convexă pe I.
Dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este concavă pe I.
Definiţie: Fie *f* o funcţie continuă pe I si $x_0 \in \mathbf{I}$ punct interior intervalului. Spunem că x_0 este punct de inflexiune al graficului funcţiei dacă *f* este convexă pe o vecinătate stânga a lui x_0 şi concavă pe o vecinătate dreapta a lui x_0 sau invers.
Observaţie: Cu ajutorul derivatei a doua se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate şi se determină punctele de inflexiune.

Asimptote orizontale
Pentru a studia existența asimptotei orizontale spre +∞ (sau −∞) la graficul unei funcții se calculează:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ sau ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$)

- Dacă limita nu există sau este infinită atunci graficul funcției nu are asimptotă orizontală spre +∞ (sau −∞)
- Dacă limita există și este finită și este egală cu un număr real $\boldsymbol{\ell}$, atunci graficul are asimptotă orizontală spre +∞ (sau −∞), care este dreapta de ecuație $y = \boldsymbol{\ell}$.

Asimptote oblice
Asimptota oblică spre +∞ (dacă există) are ecuația $y = mx + n$, unde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbf{R}^* \qquad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] \in \mathbf{R}$$

Analog se studiază existența asimptotei oblice spre −∞.

Dacă o funcție admite asimptote orizontale atunci ea nu admite asimptote oblice și reciproc.

Asimptote verticale
Fie $f: D \to \mathrm{R}, x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D. Dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală la stânga (respectiv la dreapta) pentru graicul funcției *f* dacă $l_s(x_0) = \pm\infty$ (respectiv $l_d(x_0) = \pm\infty$)

Derivatele funcţiilor elementare	**Derivatele funcţiilor compuse**	**Cazuri particulare**
$c' = 0$		
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$x'=1$; $(x^2)' = 2x$; $(x^3)' = 3x^2$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	
$\left(e^x\right)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	**Operații cu funcții derivabile**
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$
$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	
$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{u^2+1} \cdot u'$	**Derivarea funcțiilor compuse** $\left(f(u)\right)' = f'(u) \cdot u'$
$\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{u^2+1} \cdot u'$	$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$ sau $\left(u^v\right)' = u^v\left(v' \cdot \ln u + \dfrac{v}{u} \cdot u'\right)$
$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	
$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	**Derivata funcției inverse** $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$, $y = f(x)$

Integralele nedefinite a funcţiilor uzuale	Integralele nedefinite a funcţiilor compuse
$\int dx = x + C$	$\int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \varphi^n(x)\cdot\varphi'(x)dx = \frac{\varphi^{n+1}(x)}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln\lvert\varphi(x)\rvert + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)dx = e^{\varphi(x)} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx = -\cos\varphi(x) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx = \sin\varphi(x) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}x + C$	$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}dx = \mathrm{tg}\varphi(x) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{ctg}x + C$	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)}dx = -\mathrm{ctg}\varphi(x) + C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)+a^2}dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{\varphi(x)}{a} + C$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{\varphi(x)-a}{\varphi(x)+a}\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}}dx = \ln\left(\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}\right) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}}dx = \ln\left\lvert\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2-\varphi^2(x)}}dx = \arcsin\frac{\varphi(x)}{a} + C$

Formula lui Leibniz-Newton:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$, $F'(x) = f(x)$, F este primitiva funcției *f*.

Fie $f: [a; b] \to \mathbf{R}$, $a < b$, o funcție continuă. Atunci: $\int_a^a f(x)dx = 0$ și $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Fie $f: [a; b] \to \mathbf{R}$ o funcție și $c \in (a; b)$, astfel încât *f* continuă pe $[a; c]$ și $[c; b]$. Atunci are loc relația:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Formula de integrare prin părți a integralei nedefinite:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\,g(x)dx$$

Formula de integrare prin părți a integralei definite:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Aria subgraficului unei funcții

Dacă $f: [a; b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă pozitivă atunci: $A(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$

Volumul unui corp de rotație

Dacă $f: [a; b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă atunci: $V(C_f) = \pi\int_a^b f^2(x)dx$